

การเปรียบเทียบสถิติทดสอบในการตรวจสอบความเหมาะสมของตัว แบบสมการถดถอยเชิงเส้น กรณีข้อมูลไม่มีการทำซ้ำระหว่าง วิธีตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุงกับวิธีของซูและยาง

A Comparison of Methods for Testing Lack of Fit in Linear Regression Model Without Replication: Adjusted Lack of Fit Test and Su and Yang Test

ศิริรักษ์ ไชยดี และ ชินนะพงษ์ บำรุงทรัพย์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต ปทุมธานี 12121

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบวิธีการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบการถดถอย กรณีข้อมูลไม่มีการทำซ้ำ ระหว่างวิธีตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุงกับวิธีของซูและยาง เมื่อแบ่งข้อมูลเป็นกลุ่มโดยมีจำนวนกลุ่มเท่ากับ 3, 5 และ 7 ในการศึกษาจะพิจารณาตัวแปรอิสระ X_1 ตัว และความคลาดเคลื่อนสุ่มเป็นอิสระกัน มีการแจกแจงปกติ ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 ความแปรปรวนเท่ากับ 1 กำหนดให้ตัวแบบที่แท้จริงเป็นตัวแบบพหุนามลำดับที่ 2 ตัวแบบฟังก์ชันไซน์ ตัวแบบเลขชี้กำลัง โดยที่เกณฑ์ในการพิจารณาใช้การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของกำลังการทดสอบ ผลการศึกษาพบว่า วิธีตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุง ส่วนมากมีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีของซูและยาง

คำสำคัญ: ระหว่างกลุ่ม การตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบ สมการถดถอยเชิงเส้น ข้อมูลมีการทำซ้ำภายในกลุ่ม

Abstract

The objectives of this research are to compare the lack of fit test in linear regression model without replication between the adjusted lack of fit test and the Su and Yang test. The data are arranged into 3, 5 and 7 clusters. In this study, we consider only the case of one independent variable and the random error is normally distributed with mean 0 and variance 1. The assumed true models used to generate the data are polynomial of

degree 2, sine model, exponential model. The power of the test is used as the comparison criterion. The results of the study indicate that the adjusted lack of fit test are more efficient than the Su and Yang test in most of the cases.

Keyword: between clusters, lack of fit, linear regression, replication, within cluster

1. บทนำ

การวิเคราะห์การถดถอยเป็นวิธีการสร้างตัวแบบถดถอยสำหรับใช้พยากรณ์ตัวแปรตาม (Dependent variable) จากตัวแปรอิสระ (Independent variable) ลักษณะความสัมพันธ์ของตัวแปรตามและตัวแปรอิสระอาจมีความสัมพันธ์ได้ทั้งในรูปแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น รูปแบบที่ไม่เชิงเส้นมีหลายรูปแบบ เช่น รูปแบบเลขชี้กำลัง (Exponential) รูปแบบไฮเพอร์โบลา (Hyperbola) เป็นต้น การสร้างตัวแบบถดถอยนั้นมีข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับความคลาดเคลื่อนสุ่ม 2 ข้อ ดังนี้

(1) ความคลาดเคลื่อนสุ่ม (ε_i) เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติ ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 ความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 นั่นคือ $E(\varepsilon_i) = 0$, $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$

(2) ความคลาดเคลื่อนสุ่มไม่มีความสัมพันธ์กัน (Uncorrelated) นั่นคือ $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ เมื่อ $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \dots, n$

ดังนั้นควรตรวจสอบว่าความคลาดเคลื่อนสุ่ม (ε_i) มีสมบัติตามที่กำหนด โดยตรวจสอบจากสมบัติของค่าเศษตกค้าง (Residual) (e_i) แทน นอกจากนี้ยังควรมีการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบ เพื่อให้ได้ตัวแบบสำหรับพยากรณ์ค่าตัวแปรตามมีความแม่นยำและน่าเชื่อถือมากที่สุด

การตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่เสนอในเดรปเปอร์และสมิทธี [2] จะทำได้ก็ต่อเมื่อ

ข้อมูลมีการทำซ้ำเท่านั้น แต่ในความเป็นจริง ข้อมูลที่มีการทำซ้ำมักได้จากการออกแบบการทดลอง ซึ่งถ้าเก็บข้อมูลตามสภาพที่เป็นจริงอาจจะไม่สามารถเก็บรวบรวมข้อมูลที่มีการทำซ้ำได้ จึงได้มีผู้คิดวิธีตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบเมื่อข้อมูลไม่มีการทำซ้ำไว้หลายวิธี ได้แก่ ซิลลิงตัน [5] ได้เสนอแบบทดสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ได้จากการสร้างสมการเส้นถดถอย 2 เส้น แบบทดสอบดังกล่าวมีความไวต่อการจัดกลุ่ม นอกจากนี้ภายใต้ H_1 ค่าของค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อนภายในกลุ่ม (MSE_w) มีค่ามาก นิลและจอห์นสัน [4] ได้สร้างแบบทดสอบความเหมาะสมของตัวแบบด้วยการหาค่าตัวประมาณค่าความแปรปรวนที่มีสมบัติคงเส้นคงวา โจลีกาและคณะ [3] ได้นำแบบทดสอบสำหรับการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบของซิลลิงตันมาปรับปรุงโดยการหาค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อนภายในกลุ่ม (MSE_w) ใหม่ ทำให้ได้แบบทดสอบที่มีความไวต่อการจัดกลุ่มน้อยลง คริสเตนเซน [1] ได้เสนอแบบทดสอบที่สามารถตรวจสอบความไม่เหมาะสมของตัวแบบที่เกิดภายในกลุ่ม (Within - Cluster lack of fit) และความไม่เหมาะสมของตัวแบบที่เกิดระหว่างกลุ่ม (Between - Cluster lack of fit) แล้วนำแบบทดสอบที่เสนอใหม่นี้เปรียบเทียบกับแบบทดสอบอื่น 5 ชนิด โดยใช้กำลังการทดสอบ (power of the test) เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ พบว่าไม่สามารถระบุได้ว่าแบบทดสอบ

ได้ดีที่สุด ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับวิธีการแบ่งกลุ่มของข้อมูล ชูและยาง [6] ได้เสนอแบบทดสอบสำหรับการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบโดยได้มีการเพิ่มทอมกำลังสองในการคำนวณค่าสถิติทดสอบจากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวกับการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบกรณีไม่มีข้อมูลซ้ำ พบว่า ยังไม่มีผู้ใดวิจัยเปรียบเทียบแบบทดสอบที่เสนอในเครปเปอร์และสมิทซ์ [2] และแบบทดสอบที่เสนอโดยชูและยาง ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาเปรียบเทียบวิธีการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบกรณีข้อมูลไม่มีการทำซ้ำของ 2 แบบทดสอบ ได้แก่ วิธีการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุงจากวิธีที่เสนอในเครปเปอร์และสมิทซ์ [2] กับ วิธีของชูและยาง

2. สถิติทดสอบที่ใช้ในการศึกษา

2.1 วิธีตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่เสนอในเครปเปอร์และสมิทซ์ [2]

เมื่อข้อมูลของตัวแปร X ที่มีค่าสังเกต Y หลายค่า โดย X มีค่าต่างๆ กัน c ค่า และแทนค่าสังเกตที่ i ของ c ค่านี้ด้วย X_i , $i=1,2,\dots,c$ ถ้าที่ค่า X_i มีค่าสังเกตของ Y จำนวน n_i ค่า แทนค่าสังเกตเหล่านี้ด้วย Y_{ij} เมื่อ $j=1,2,\dots,n_i$ จำนวนข้อมูลทั้งหมด $n = \sum_{i=1}^c n_i$ วิธีที่เสนอในเครปเปอร์และสมิทซ์ [2] ในการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบใช้หลักการที่ว่า ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนประกอบไปด้วย 2 ส่วน คือ

2.1 ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนที่แท้จริง (Sum of squares pure error, SSPE) โดยที่ถ้าค่าสังเกตของ Y อย่างน้อย 2 ค่า ที่สังเกตที่ X ระดับเดียวกันมีค่าต่างกัน แสดงว่าความแตกต่าง

ดังกล่าวเกิดจากความคลาดเคลื่อนสุ่ม ความแตกต่างนี้สามารถใช้ประมาณ σ^2 ได้ โดยมีค่าประมาณ ดังนี้

$$SSPE = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$$

$$\text{โดยที่ } \bar{Y}_i = \frac{Y_{i1} + Y_{i2} + \dots + Y_{in_i}}{n_i}$$

$$\text{มีองศาเสรีเท่ากับ } \sum_{i=1}^c n_i - c = n - c$$

2.2 ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนเนื่องจากตัวแบบที่ใช้ไม่เหมาะสม (Sum of squares lack of fit, SSLF) เกิดจากการกำหนดตัวแบบผิดไปจากที่ควรจะเป็น สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$SSLF = \sum_{i=1}^c n_i (\hat{Y}_i - \bar{Y}_i)^2$$

โดยที่ \hat{Y}_i เป็นค่าพยากรณ์ของค่าคาดหมาย Y_i

มีองศาเสรีเท่ากับ $c - k - 1$

k คือ จำนวนตัวแปรอิสระ

จากที่กล่าวข้างต้นสามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 + \sum_{i=1}^c n_i (\hat{Y}_i - \bar{Y}_i)^2$$

$$SSE = SSPE + SSLF$$

จะได้สถิติ F_{Ds} ดังนี้

$$F_{Ds} = \frac{SSLF / (c - k - 1)}{SSPE / (n - c)}$$

จะใช้สถิติ F_{Ds} ที่คำนวณได้เปรียบเทียบกับค่า $F_{(c-k-1, n-c)}$ ที่เปิดจากตาราง ถ้า F_{Ds} ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่า F จากตาราง แสดงว่าตัวแบบที่กำหนดนั้นไม่เหมาะสม

เนื่องจากการศึกษานี้ได้มีการแบ่งข้อมูลออกเป็นกลุ่ม ดังนั้นผู้วิจัยจึงนำวิธีที่เสนอในเครปเปอร์และสมิทซ์ [2] ที่ใช้กับกรณีข้อมูลมีการทำซ้ำมาปรับปรุงเพื่อใช้กับกรณีข้อมูลไม่มีการทำซ้ำ โดย

แทนที่ X ด้วยค่าเฉลี่ยของ X ที่อยู่ในกลุ่มเดียวกันก็
จะสามารถหาค่าผลบวกกำลังสองของความคลาด
เคลื่อนที่แท้จริงได้

2.2 วิธีของชูและยาง

ชูและยาง [6] ได้เสนอแบบทดสอบสำหรับการ
การตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบโดยได้มีการ
การเพิ่มเทอมกำลังสองในการหาค่าสถิติทดสอบวิธี
ของชูและยาง จะพิจารณาตัวแบบเพื่อคำนวณค่าสถิติ
ทดสอบของชูและยาง (F_{SY}) ดังนี้

ตัวแบบที่ 1

$$E(Y) = X\beta$$

เมื่อ Y แทนเวกเตอร์ของตัวแปรตามขนาด $n \times 1$

X แทนเมทริกซ์ของตัวแปรอิสระขนาด $n \times k$

β แทนเวกเตอร์ของค่าพารามิเตอร์ในสมการ
ถดถอยขนาด $(k \times 1)$

c แทนจำนวนกลุ่มของข้อมูลของตัวแปรอิสระ

k แทนจำนวนตัวแปรอิสระ

ค่าผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนที่เกิดจาก
ตัวแบบที่ 1 แทนด้วย SSE_x

$$SSE_x = Y' \{ I_n - X(X'X)^{-1} X' \} Y$$

เมื่อ Y แทนเวกเตอร์ของตัวแปรตามขนาด $n \times 1$

X แทนเมทริกซ์ของตัวแปรอิสระขนาด $n \times k$

I_n แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$

โดยตัวอย่างของเมทริกซ์ Y และ X

เมื่อ $n = 9, c = 3$ กลุ่มที่ 1 มีจำนวนค่าสังเกตเท่ากับ 4

กลุ่มที่ 2 มีจำนวนค่าสังเกตเท่ากับ 3 และกลุ่มที่ 3

มีจำนวนค่าสังเกตเท่ากับ 2

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ X_{13} \\ X_{14} \\ X_{21} \\ X_{22} \\ X_{23} \\ X_{31} \\ X_{32} \end{bmatrix}$$

สมาชิกในเวกเตอร์ Y คือ $Y_m, m=1,2,3,\dots,n$

สมาชิกในเมทริกซ์ X คือ $X_{ij}, i=1,2,\dots,c$

$j=1,2,\dots,n_i$

ตัวแบบที่ 2

$$E(Y) = X\beta + w\alpha$$

เมื่อ Y แทนเวกเตอร์ของตัวแปรตามขนาด $n \times 1$

X แทนเมทริกซ์ของตัวแปรอิสระขนาด
 $n \times k$

β แทนเวกเตอร์ของค่าพารามิเตอร์ในสมการ
ถดถอยขนาด $k \times 1$

W แทนเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นเทอมกำลังหนึ่ง
และเทอมกำลังสองของตัวแปรอิสระ X

α แทนเวกเตอร์ของค่าพารามิเตอร์ของเทอม
กำลังหนึ่งและเทอมกำลังสอง ที่เพิ่มมาเพื่อใช้ในการ
คำนวณสถิติตามวิธีของชูและยางขนาด $q \times 1$

ค่าผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนที่เกิดจาก
ตัวแบบที่ 2 แทนด้วย SSE_{xw}

$$SSE_{xw} = Y' \{ I_n - X_w (X_w' X_w)^{-1} X_w' \} Y$$

เมื่อ Y แทนเวกเตอร์ของตัวแปรตามขนาด $n \times 1$

X_w แทนเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นเทอมกำลัง
หนึ่งและกำลังสองของตัวแปรอิสระ X ขนาด
 $n \times (k+q)$

I_n แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$

โดย \mathbf{X}_w ในวิจัยนี้จะใช้เพิ่มเทอมกำลังหนึ่งและเทอมกำลังสองของตัวแปรอิสระ \mathbf{X} ในการคำนวณ SSE_{XW} สำหรับสมการถดถอยเชิงเส้นเชิงเดียว

$$\mathbf{X}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{11} & 1 & \mathbf{x}_{11} & \mathbf{x}_{11}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{x}_{12} & 1 & \mathbf{x}_{12} & \mathbf{x}_{12}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{x}_{13} & 1 & \mathbf{x}_{13} & \mathbf{x}_{13}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{x}_{14} & 1 & \mathbf{x}_{14} & \mathbf{x}_{14}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{x}_{21} & 1 & \mathbf{x}_{21} & \mathbf{x}_{21}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{x}_{21} & 1 & \mathbf{x}_{22} & \mathbf{x}_{22}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{x}_{21} & 1 & \mathbf{x}_{23} & \mathbf{x}_{23}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{x}_{21} & 1 & \mathbf{x}_{31} & \mathbf{x}_{31}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{x}_{21} & 1 & \mathbf{x}_{32} & \mathbf{x}_{32}^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

แบบทดสอบที่ใช้ตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบโดยรวม(The overall lack of fit test) คือ

$$F_{SY} = \frac{SSE_x - SSE_{xw} / (r_x - r_{xw})}{SSE_{xw} / (n - r_{xw})}$$

เมื่อ n คือ ขนาดตัวอย่าง
 r_x คือ rank ของเมทริกซ์ \mathbf{X}
 r_{XW} คือ rank ของเมทริกซ์ \mathbf{X}_w

จะปฏิเสธสมมติฐานว่าง (H_0) เมื่อ F_{SY} ที่คำนวณมีค่ามากกว่า $F_{r_x - r_{xw}, n - r_{xw}}$ ที่จากตาราง นั่นคือตัวแบบที่กำหนดนั้นไม่เหมาะสม

3.ขอบเขตการวิจัย

3.1 ขนาดตัวอย่างที่ศึกษา มีขนาด $n = 15, 50$ และ 100

3.2 ความคลาดเคลื่อนสุ่มมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน นั่นคือค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 ความแปรปรวนเท่ากับ 1

3.3 กำหนดค่า $\beta_0 = \beta_1 = 2$

3.4 กำหนดจำนวนกลุ่มเป็น 3 จำนวน คือ 3, 5, 7

3.5 ทำการจำลองข้อมูลซ้ำๆ กัน 2,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์

3.6 ระดับนัยสำคัญของการทดสอบเท่ากับ 0.05

4.วิธีการดำเนินการศึกษา

ในการวิจัยนี้เป็นการศึกษาโดยอาศัยวิธีการจำลองค่า (Simulation study) ด้วยโปรแกรม R เพื่อนำมาสร้างเป็นข้อมูล 2000 ชุด โดยมีขั้นตอนดังนี้

4.1 จำลองข้อมูลจำนวน 2000 ชุดในแต่ละสถานการณ์ด้วยโปรแกรม R

4.2 แบ่งกลุ่มของข้อมูลให้มีจำนวนกลุ่มตามต้องการ

โดยการศึกษานี้จะกำหนดให้แต่ละกลุ่มมีขนาดตัวอย่างเท่าๆ กัน ยกเว้นกรณีที่ไม่สามารถจัดให้เท่ากันทุกกลุ่มจะให้กลุ่มสุดท้ายที่จัดมีขนาดแตกต่างจากกลุ่มอื่น ขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่ม มีดังนี้

ตารางที่ 1 ขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่มสำหรับวิธีการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุงกับวิธีของชูและยาง

ขนาดตัวอย่าง	จำนวนกลุ่ม	ขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่ม
15	3	5, 5, 5
	5	3, 3, 3, 3, 3
	7	2, 2, 2, 2, 2, 3
50	3	17, 17, 16
	5	10, 10, 10, 10, 10
	7	7, 7, 7, 7, 7, 8

ตารางที่ 1 ขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่มสำหรับวิธีการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุงกับวิธีของชูและยาง (ต่อ)

ขนาดตัวอย่าง	จำนวนกลุ่ม	ขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่ม
100	3	33, 33, 34
	5	20, 20, 20, 20, 20
	7	14, 14, 14, 14, 14, 16

สำหรับเมทริกซ์ที่ใช้เพื่อแสดงกลุ่มของข้อมูลจะแทนด้วยเมทริกซ์ Z มีการแบ่งกลุ่มเป็น 3, 5 และ 7 กลุ่ม เมทริกซ์ Z เมทริกซ์ดังกล่าวมีขนาด $n \times c$ โดย n คือขนาดตัวอย่าง c คือจำนวนกลุ่มเมทริกซ์ Z จะประกอบไปด้วยตัวเลข 0 และ 1 เท่านั้น ค่าในคอลัมน์ที่ไม่เป็น 0 จะมีความสัมพันธ์กับขนาดตัวอย่างในกลุ่มที่ $i, i = 1, 2, \dots, c$ ยกตัวอย่างเช่น ข้อมูลมีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 9 ต้องการแบ่งกลุ่มออกเป็น 3 กลุ่ม ดังนี้

หน่วยตัวอย่างค่าที่ 1, 2, 3, 4 อยู่กลุ่ม 1

หน่วยตัวอย่างค่าที่ 5, 6, 7 อยู่กลุ่ม 2

หน่วยตัวอย่างค่าที่ 8, 9 อยู่กลุ่ม 3

รูปแบบของ Z จะแสดงได้ดังนี้

$$Z' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3 จำนวนค่าสถิติทดสอบทั้ง 2 วิธี

4.3.1 สถิติทดสอบของวิธีตรวจสอบ

ความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุง จำนวนค่าสถิติได้ดังนี้

$$F = \frac{SSLF / (c - k - 1)}{SSPE / (n - c)}$$

เมื่อ n คือ ขนาดตัวอย่าง

c คือ จำนวนกลุ่มของข้อมูลของตัวแปรอิสระ

k คือ จำนวนตัวแปรอิสระ

จะปฏิเสธสมมติฐานว่าง (H_0) เมื่อ F ที่คำนวณมีค่ามากกว่า $F_{(c-k-1, n-c)}$

4.3.2 สถิติทดสอบของชูและยาง สถิติ

ทดสอบเป็น ดังนี้

$$F_{SY} = \frac{SSE_x - SSE_{xw} / (r_x - r_{xw})}{SSE_{xw} / (n - r_{xw})}$$

เมื่อ n คือ ขนาดตัวอย่าง

r_x คือ rank ของเมทริกซ์ X

r_{xw} คือ rank ของเมทริกซ์ X_w

จะปฏิเสธสมมติฐานว่าง (H_0) เมื่อ F_{SY} ที่คำนวณมีค่ามากกว่า $F_{r_x - r_{xw}, n - r_{xw}}$

$$\text{โดยที่ } SSE = Y' \{ I_n - X(X'X)^{-1} X' \} Y$$

$$SSE_{xw} = Y' \{ I_n - X_w(X_w'X_w)^{-1} X_w' \} Y$$

4.4 จำนวนค่ากำลังการทดสอบตามวิธี

ตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุงกับวิธีของชูและยาง เพื่อนำมาเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบสมการถดถอยเชิงเส้น กรณีข้อมูลไม่มีการทำซ้ำ

5.ผลการวิจัย

จากตารางภาคผนวกที่ 1 พิจารณาตัวแบบพหุนามลำดับ 2 พบว่า ทั้ง 2 วิธี คือ วิธีตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุงกับวิธีของชูและยาง เมื่อ $\beta_2 = 0.0001, 0.001, \text{ และ } 0.01$ ในทุกขนาดตัวอย่าง มีค่ากำลังการทดสอบต่ำมาก เมื่อพิจารณาที่ $\beta_2 = 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, \text{ และ } 1$ พบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่ากำลังการทดสอบมีค่าเพิ่มขึ้นหรือเท่ากัน เมื่อพิจารณาอิทธิพลของ β_2

พบว่า ค่ากำลังการทดสอบโดยส่วนใหญ่มีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ β_2 เพิ่มขึ้น ยกเว้นกรณี $n = 50$ $\beta_2 = 0.5, 1$ และ $n = 100$

$\beta_2 = 0.5, 1$ ทั้ง 2 วิธีมีค่ากำลังการทดสอบเท่ากันในทุกจำนวนกลุ่ม และวิธีตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุง เมื่อ $n = 15$ $\beta_2 = 0.5, 1$ $c = 3, 5, 7$ วิธีของชูและยาง $n = 15$ $\beta_2 = 0.5, 1$ $c = 3$ ที่มีค่ากำลังการทดสอบเท่ากัน

จากตารางภาคผนวกที่ 2 พิจารณาตัวแบบฟังก์ชันไซน์ ในกรณี $n = 15$ $\beta_2 = 0.01, 0.1, 0.5$ กรณี $n = 50$ $\beta_2 = 0.01, 0.1$ และกรณี $n = 100$ $\beta_2 = 0.01, 0.1$ ค่ากำลังการทดสอบของทั้ง 2 วิธีมีค่ากำลังการทดสอบต่ำมาก พิจารณาที่ $\beta_2 = 0.1, 0.5, 1$, และ 1.5 พบว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่ากำลังการทดสอบโดยส่วนใหญ่มีค่าเพิ่มขึ้นหรือเท่ากัน เมื่อพิจารณาอิทธิพลของ β_2 พบว่า การทดสอบทั้ง 2 วิธี มีค่ากำลังการทดสอบเพิ่มขึ้น เมื่อสัมประสิทธิ์การถดถอยเพิ่มขึ้น

จากตารางภาคผนวกที่ 2 พิจารณาตัวแบบชี้กำลังพบว่า ค่ากำลังการทดสอบของทั้ง 2 วิธี เมื่อ $\beta_1 = 0.01$ ในทุกขนาดตัวอย่างมีค่าต่ำมาก พิจารณาที่ $\beta_2 = 0.1, 0.5, 1$, และ 1.5 พบว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่ากำลังการทดสอบมีค่าเพิ่มขึ้นหรือเท่ากัน พิจารณาอิทธิพลของ β_1 พบว่า วิธีวิธีตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุง กับ วิธีของชูและยาง มีค่ากำลังการทดสอบเพิ่มขึ้นตามค่า β_1 ยกเว้นกรณี $\beta_1 = 0.5, 1$ และ 1.5 ในทุกขนาดตัวอย่าง ทุกจำนวนกลุ่ม ทั้ง 2 วิธีมีค่ากำลังการทดสอบเท่ากัน

6.สรุปผลการวิจัย

6.1 เมื่อสัมประสิทธิ์การถดถอยจำนวนกลุ่มเดียวกัน ค่ากำลังการทดสอบทั้ง 2 วิธีจะเพิ่มขึ้นหรือเท่ากันเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

6.2 ค่ากำลังการทดสอบของทั้ง 2 วิธี จะมีค่าต่ำมาก เมื่อสัมประสิทธิ์การถดถอยมีค่าต่ำมาก

6.3 ค่ากำลังการทดสอบทั้ง 2 วิธี คือ วิธีตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุง กับ วิธีของชูและยาง เมื่อสัมประสิทธิ์การถดถอยมีขนาดเพิ่มขึ้นค่ากำลังการทดสอบจะเพิ่มขึ้น เนื่องจากเมื่อสัมประสิทธิ์เพิ่มขึ้นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรอิสระชัดเจนยิ่งขึ้น ทำให้สถิติทดสอบสามารถตรวจสอบตัวแบบที่ถูกต้องได้มากขึ้น โดยเฉพาะตัวแบบเลขชี้กำลัง (Exponential model)

7. ข้อเสนอแนะ

ถ้าต้องการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบ กรณีข้อมูลไม่มีการทำซ้ำ ควรใช้วิธีตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุง เนื่องจากมีวิธีการคำนวณง่าย ค่ากำลังการทดสอบโดยส่วนใหญ่สูงกว่าวิธีของชูและยาง หรือถ้าน้อยกว่าวิธีของชูและยาง ก็น้อยกว่าเพียงเล็กน้อย ส่วนการแบ่งจำนวนกลุ่ม ควรเลือกแบ่งกลุ่มของข้อมูลให้มีจำนวนน้อย ไม่ควรให้สูงสำหรับการศึกษาในอนาคต อาจศึกษาประสิทธิภาพการทดสอบของการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบด้วยวิธีการแบ่งข้อมูลเป็นกลุ่มวิธีอื่น

8. เอกสารอ้างอิง

- [1] Christensen, Ronald, Small Sample Characterizations of Near Replicate Lack of Fit Tests, Journal of the American Statistical Association, Vol.88; pp. 752- 56, 1991.
- [2] Draper, N.R. and Smith, H., Applied Regression Analysis. 2nd edition, John Wiley, New York, 1981.

- [3] Joglekar, G., Schuenemeyer, J. H., and LaRiccia, V., Lack-of-Fit Testing When Replicates Are Not Available., The American Statistician, Vol.43; pp.135-143, 1989.
- [4] Neill, J. W. and Johnson, D. E., Testing Linear Regression Function Adequacy Without Replication, The Annals of Statistics, Vol.13; pp.1482-1489, 1985.
- [5] Shillington, E.R., Testing Lack-of-Fit in Regression Without Replication, Canadian Journal of Statistics, Vol. 7; pp.137-146. 1979.
- [6] Su, Z. and S. Yang. , A Note on Lack of Fit Tests for Linear Models Without Replication, Journal of the American Statistical Association, Vol.101; pp. 205- 210, 2006.

ตารางภาคผนวกที่ 1 ค่ากำลังการทดสอบ กรณีที่ตัวแบบพหุนามลำดับที่ 2 ($Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \varepsilon$) เป็นตัวแบบที่แท้จริง กำหนดให้ $\beta_0 = \beta_1 = 2$ ระดับนัยสำคัญ 0.05

ตัวแบบ	ขนาดตัวอย่าง	β_2	วิธีตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุง			วิธีของชูและยาง		
			C = 3	C = 5	C = 7	C = 3	C = 5	C = 7
พหุนามลำดับที่ 2	n = 15	0.0001	0.047	0.051	0.054	0.048	0.050	0.045
		0.001	0.048	0.051	0.054	0.048	0.050	0.045
		0.01	0.052	0.054	0.053	0.048	0.050	0.046
		0.05	0.107	0.094	0.078	0.150	0.057	0.047
		0.1	0.320	0.262	0.185	0.064	0.081	0.053
		0.5	1	1	1	1	0.753	0.161
		1	1	1	1	1	0.999	0.299
	n = 50	0.0001	0.054	0.048	0.044	0.048	0.048	0.047
		0.001	0.054	0.048	0.045	0.048	0.047	0.048
		0.01	0.059	0.056	0.047	0.058	0.051	0.047
		0.05	0.203	0.212	0.192	0.379	0.178	0.132
		0.1	0.571	0.705	0.676	0.865	0.669	0.540
		0.5	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1	1	1
	n = 100	0.0001	0.048	0.051	0.051	0.052	0.057	0.049
		0.001	0.048	0.049	0.050	0.053	0.057	0.049
		0.01	0.064	0.057	0.057	0.060	0.066	0.056
		0.05	0.510	0.487	0.422	0.465	0.363	0.311
		0.1	0.985	0.985	0.982	0.983	0.960	0.937
		0.5	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1	1	1

ตารางภาคผนวกที่ 2 ตัวแบบฟังก์ชันไซน์ ($Y = \beta_0 + \beta_1 \sin X_1 + \varepsilon$) และตัวแบบเลขชี้กำลัง ($Y = \exp(\beta_0 + \beta_1 X) + \varepsilon$) เป็นตัวแบบที่แท้จริง กำหนดให้ $\beta_0 = 2$ ระดับนัยสำคัญ 0.05

ตัวแบบ	ขนาดตัวอย่าง	β_1	วิธีตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุง			วิธีของชูและยาง		
			C = 3	C = 5	C = 7	C = 3	C = 5	C = 7
ฟังก์ชันไซน์	n = 15	0.01	0.047	0.052	0.053	0.048	0.050	0.045
		0.1	0.050	0.053	0.054	0.049	0.047	0.046
		0.5	0.068	0.121	0.093	0.084	0.065	0.047
		1	0.117	0.433	0.255	0.217	0.103	0.056
		1.5	0.220	0.809	0.558	0.479	0.165	0.068
	n = 50	0.01	0.055	0.050	0.044	0.052	0.048	0.048
		0.1	0.069	0.055	0.054	0.061	0.054	0.053
		0.5	0.442	0.332	0.392	0.366	0.294	0.234
		1	0.956	0.947	0.973	0.958	0.925	0.847
		1.5	1	1	1	1	0.999	0.998
	n = 100	0.01	0.047	0.049	0.047	0.052	0.056	0.050
		0.1	0.052	0.065	0.065	0.065	0.065	0.062
		0.5	0.273	0.742	0.677	0.590	0.480	0.417
		1	0.755	1	0.999	0.998	0.995	0.985
		1.5	0.983	1	1	1	1	1

ตารางภาคผนวกที่ 2 ตัวแบบฟังก์ชันไซน์ ($Y = \beta_0 + \beta_1 \sin X_1 + \varepsilon$) และตัวแบบเลขชี้กำลัง ($Y = \exp(\beta_0 + \beta_1 X) + \varepsilon$) เป็นตัวแบบที่แท้จริง กำหนดให้ $\beta_0 = 2$ ระดับนัยสำคัญ 0.05 (ต่อ)

ตัวแบบ	ขนาดตัวอย่าง	β_1	วิธีตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุง			วิธีของชูและยาง		
			C = 3	C = 5	C = 7	C = 3	C = 5	C = 7
เลขชี้กำลัง	n = 15	0.01	0.047	0.051	0.054	0.043	0.050	0.045
		0.1	0.167	0.128	0.104	0.086	0.063	0.047
		0.5	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1	1	1
		1.5	1	1	1	1	1	1
	n = 50	0.01	0.055	0.048	0.046	0.052	0.048	0.047
		0.1	0.300	0.334	0.306	0.353	0.292	0.218
		0.5	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1	1	1
		1.5	1	1	1	1	1	1
	n = 100	0.01	0.047	0.050	0.050	0.052	0.056	0.049
		0.1	0.748	0.752	0.689	0.738	0.631	0.539
		0.5	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1	1	1
		1.5	1	1	1	1	1	1