ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13

Generalized Beauty: The Product of 76923 and the Multiple of 13

มัณฑิยา ครุฑธมงคล และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา อำเภอเมือง จังหวัดพะเยา 56000

Manthiya Krutthamongkon and Aiyared Iampan*

Division of Mathematics, School of Science, University of Phayao, Mueang, Phayao 56000

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการศึกษาและการหารูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 ซึ่งได้จากการสังเกตผลหาร $\frac{1}{13}=0.\dot{0}7692\dot{3}$ โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นหลักในการพิสูจน์ ผลการศึกษาพบรูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 ดังนี้ $76923\times13\times n=(n-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-n)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

คำสำคัญ : หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์, พหุคูณของ 13, ผลคูณ

Abstract

This article presents the study and finding a general form of the product of 76923 and the multiple of 13 in which from the observation of the quotient $\frac{1}{13}=0.\dot{0}7692\dot{3}$. The Principle of Mathematical Induction was used primarily for the proof. The results show that the general form of the product of 76923 and the multiple of 13 is $76923\times13\times n=(n-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-n)$ for all positive integer n.

Key words: principle of mathematical induction, multiple of 13, product

1. บทนำ

ความสวยงามของคณิตศาสตร์ที่พบกันบ่อยอย่างหนึ่งคือสมบัติทางพีชคณิตของตัวเลข ซึ่งเราได้สังเกตเห็นความสัมพันธ์ทางพีชคณิตของตัวเลขบางอย่างจากผลหารต่อไปนี้

$$\frac{1}{13}=0.076923076923\ldots=0.\dot{0}7692\dot{3}$$

เราพบว่าผลหารที่ได้อยู่ในรูปของทศนิยมซ้ำ ซึ่งจำนวนซ้ำนี้เองที่ทำให้เกิดความสวยงามที่

***ผู้รับผิดชอบบทความ :** aiyared.ia@up.ac.th

น่าสนใจ คือ รูปแบบของผลคูณของจำนวน(ซ้ำ) 76923 กับพหุคูณของ 13 ที่มีผลหารเท่ากับ 1, 2, 3, …, 10 โดยได้เขียนแสดงผลการสังเกตไว้ในหัวข้อต่อไป ฉะนั้นถ้าเราสามารถหารูปทั่วไปของ 76923 กับพหุคูณของ 13 ได้สำหรับทุกผลหาร ก็จะเป็นการเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นสำหรับการคำนวณหาผลคูณนี้นั่นเอง การศึกษาและการหารูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 ได้แนวคิดจากบทความเรื่อง ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 [1] ที่ได้แสดงถึงการศึกษาและการหารูปทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้

ดังนั้นบทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์ที่จะศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 เพื่อความสะดวกสำหรับการคำนวณหาผลคูณดังกล่าว โดยเครื่องมือที่เราใช้เป็นหลักในการพิสูจน์คือขั้นตอนวิธีการหาร และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ขั้นตอนวิธีการหาร (division algorithm) [2] ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $b \neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง $a = bq + r$ และ $0 \le r < |b|$

ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (principle of mathematical induction) [2] กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(1)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก k แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

จาก [1,3] กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ $b = 10$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม q และ r ซึ่ง $a = 10 \cdot q + r$ และ $0 \le r < 10$ นั่นคือ r เป็นเลขโดด เรานิยาม

$$a = {}_q r \qquad \text{(I)}$$

เช่น

$$\begin{array}{lllll}
0 = {}_0 0 & 10 = {}_1 0 & 50 = {}_5 0 & 500 = {}_{50} 0 & 1000 = {}_{100} 0 \\
1 = {}_0 1 & 11 = {}_1 1 & 51 = {}_5 1 & 501 = {}_{50} 1 & 1001 = {}_{100} 1 \\
2 = {}_0 2 & 12 = {}_1 2 & 52 = {}_5 2 & 502 = {}_{50} 2 & 1002 = {}_{100} 2 \\
\vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
9 = {}_0 9 & 19 = {}_1 9 & 59 = {}_5 9 & 509 = {}_{50} 9 & 1009 = {}_{100} 9
\end{array}$$

และ

$$\begin{array}{lllll}
-0 = {}_{-0} 0 & -10 = {}_{-1} 0 & -50 = {}_{-5} 0 & -500 = {}_{-50} 0 & -1000 = {}_{-100} 0 \\
-1 = {}_{-1} 9 & -11 = {}_{-2} 9 & -51 = {}_{-6} 9 & -501 = {}_{-51} 9 & -1001 = {}_{-101} 9 \\
-2 = {}_{-1} 8 & -12 = {}_{-2} 8 & -52 = {}_{-6} 8 & -502 = {}_{-51} 8 & -1002 = {}_{-101} 8 \\
\vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
-9 = {}_{-1} 1 & -19 = {}_{-2} 1 & -59 = {}_{-6} 1 & -509 = {}_{-51} 1 & -1009 = {}_{-101} 1
\end{array}$$

เพื่อความสะดวกในการเขียน เราจะเขียนจำนวน ${}_0 r$ แทนด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม $0 \le r < 10$ และได้นิยามเซตของจำนวนใน (I) ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1 [3] กำหนดให้ ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ แทนเซตของจำนวนใน (I) ทั้งหมด นั่นคือ

$${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R} = \{{}_q r \mid q, r \in \mathbb{Z} \text{ และ } 0 \le r < 10\} \qquad \text{(II)}$$

และเรียกสมาชิกของ ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ ว่า จำนวนเศษเหลือ (remainder number)

จาก [4] จะได้ว่าการแปลงจำนวนที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือเป็นเลขฐานสิบทำได้ดังนี้

$${}_{q_n}r_n\,{}_{q_{n-1}}r_{n-1}\,{}_{q_{n-2}}r_{n-2}\cdots{}_{q_3}r_3\,{}_{q_2}r_2\,{}_{q_1}r_1 = q_n(r_n+q_{n-1})(r_{n-1}+q_{n-2})\ldots(r_3+q_2)(r_2+q_1)r_1$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n เช่น การแปลง $237\,{}_4 9\,{}_1 4\,{}_{-2}601$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$\begin{aligned}
237\,{}_4 9\,{}_1 4\,{}_{-2}601 &= {}_0 2\,{}_0 3\,{}_0 7\,{}_4 9\,{}_1 4\,{}_{-2} 6\,{}_0 0\,{}_0 1 \\
&= 0(2+0)(3+0)(7+4)(9+1)(4-2)(6+0)(0+0)1 \\
&= 23(11)(10)2601 \\
&= 23\,{}_1 1\,{}_1 02601 \\
&= 2(3+1)(1+1)02601 \\
&= 24202601
\end{aligned}$$

การศึกษาและการประยุกต์ของจำนวนเศษเหลือดูได้จาก [1,3,5,6] และเพื่อความสะดวกต่อการพิสูจน์ เราจะใช้สัญลักษณ์ $\#(m)$ แทนจำนวนของ m ที่เรียงติดกัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m เช่น $1\underbrace{99999}_{\#(9)=5}8$

2. ผลการศึกษาหลัก

จากการสังเกตผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 ทำให้เราพบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจดังนี้

$76923\times13\times1$	=	76923×13	=	0999999
$76923\times13\times2$	=	76923×26	=	1999998
$76923\times13\times3$	=	76923×39	=	2999997
$76923\times13\times4$	=	76923×52	=	3999996
$76923\times13\times5$	=	76923×65	=	4999995
$76923\times13\times6$	=	76923×78	=	5999994
$76923\times13\times7$	=	76923×91	=	6999993
$76923\times13\times8$	=	76923×104	=	7999992
$76923\times13\times9$	=	76923×117	=	8999991
$76923\times13\times10$	=	76923×130	=	9999990

เราสังเกตเห็นว่าผลคูณ

$$76923\times13\times n = (n-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-n)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \le 10$

ตัวอย่าง 1 จะแสดงให้เห็นว่าผลคูณที่หาได้สอดคล้องกับข้อสังเกตของเรา และถ้า $n > 10$ แล้วผลคูณที่หาได้ไม่สอดคล้องกับข้อสังเกตของเรา ซึ่งจะนำเราไปสู่การศึกษาของบทความนี้

ตัวอย่าง 1 ผลคูณของ $76923\times13\times2$ สามารถหาได้ถูกต้องจากการสังเกตที่เราพบ โดยเลขหลักแรกของผลลัพธ์เป็น $2-1$ และเลขหลักสุดท้ายเป็น $10-2$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
76923\times13\times2 &= (2-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-2) \\
&= 1\underbrace{99999}_{\#(9)=5}8
\end{aligned}$$

แต่ถ้า $n > 10$ จะเห็นได้ว่า $10-n < 0$ เช่น ผลคูณของ $76923\times13\times11 = 10999989$ ซึ่งเทียบกับการสังเกตข้างต้น จะได้เป็น 1099999(–1) ทำให้เราไม่ทราบความหมายในระบบเลขฐานสิบ

ด้วยเหตุนี้ เราจึงเกิดข้อสงสัยสองข้อดังนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 ได้หรือไม่

(2) ถ้าเราสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 ได้ แล้วผลคูณที่ได้จะสอดคล้องกับการสังเกตที่เราพบหรือไม่

บทตั้ง 1 มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการศึกษาในบทความนี้ โดยได้แสดงให้เห็นถึงลักษณะของจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มลบ ยิ่งไปกว่านั้นยังได้นิยามการดำเนินการทวิภาค (binary operation) $\boxplus$ บน ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ โดย

$$ {}_{q}r \boxplus {}_{t}s = \begin{cases} {}_{q+t}(r+s) \ ; \ 0 \le r+s \le 9 \\ {}_{(q+t)+b}a \quad ; \ r+s \ge 10, r+s = {}_{b}a, 0 \le a < 10, b \in \mathbb{Z} \end{cases} $$

สำหรับทุก ${}_{q}r, {}_{t}s \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ และจะได้ว่า $\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}, \boxplus \rangle$ เป็นกรุป (group)

บทตั้ง 1 [3] กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n = {}_{q}r$ จะได้ว่า

$$ -n = \begin{cases} {}_{-q}0 \quad ; \ r = 0 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) \ ; \ r \ne 0 \end{cases} \qquad \text{(III)} $$

ทฤษฎีบท 3 [3] $\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}, \boxplus \rangle$ เป็นกรุป

บทตั้ง 2 สำหรับทุกจำนวนนับ n จะได้ว่า

$$ \begin{aligned} 10-n+9 &= \begin{cases} {}_{1}(9-n) \quad ; \ n \le 9 \\ {}_{-q}(10-r) \ ; \ n \ge 10, n-9 = {}_{q}r, 0 \le r < 10, q \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &= {}_{1}(9-n) \ \text{ เมื่อ } 9-n \text{ ถูกแปลงเป็นจำนวนเศษเหลือ} \end{aligned} $$

การพิสูจน์ จากการดำเนินการทวิภาค $\boxplus$ ของกรุป ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ เราพบว่า

$$ 10-n+9 = 10+(9-n) = {}_{1}0 \boxplus (9-n) $$

สำหรับทุกจำนวนนับ n เมื่อ $9-n$ จะต้องถูกแปลงเป็นจำนวนเศษเหลือ ฉะนั้นโดยบทตั้ง 1 ทำให้เราแปลง $9-n$ เป็นจำนวนเศษเหลือได้ดังนี้

$$ 9-n = \begin{cases} {}_{0}(9-n) \quad ; \ n \le 9 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) \ ; \ n \ge 10, n-9 = {}_{q}r, 0 \le r < 10, q \in \mathbb{Z} \end{cases} $$

ทำให้เราได้ว่า

$$ \begin{aligned} 10-n+9 &= {}_{1}0 \boxplus \begin{cases} {}_{0}(9-n) \quad ; \ n \le 9 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) \ ; \ n \ge 10, n-9 = {}_{q}r, 0 \le r < 10, q \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &= \begin{cases} {}_{1}(9-n) \quad ; \ n \le 9 \\ {}_{-q}(10-r) \ ; \ n \ge 10, n-9 = {}_{q}r, 0 \le r < 10, q \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &= {}_{1}(9-n) \ \text{ เมื่อ } 9-n \text{ ถูกแปลงเป็นจำนวนเศษเหลือ} \end{aligned} $$

โดยบทตั้ง 1 และ 2 ทำให้เราสามารถหารูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$ 76923 \times 13 \times n = (n-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-n) \qquad \text{(IV)} $$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$ 76923 \times 13 \times n = (n-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-n) $$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n เนื่องจาก

$$\begin{aligned} 76923\times 13\times 1 &= 0999999 \\ &= (1-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-1) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก k จะได้ว่า

$$76923\times 13\times k = (k-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-k)$$

เราจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง พิจารณา

$$\begin{aligned} 76923\times 13\times (k+1) &= (76923\times 13\times k)+(76923\times 13\times 1) \\ &= (k-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-k)+0\underbrace{99999}_{\#(9)=5}9 \\ &= (k-1)\underbrace{{}_1 8_1 8_1 8_1 8_1 8}_{\#({}_1 8)=5}(10-k+9) \\ &= (k-1)\underbrace{{}_1 8_1 8_1 8_1 8_1 8}_{\#({}_1 8)=5}{}_1(9-k) \\ &= (k-1+1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(9-k) \\ &= k\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(9-k) \\ &= \begin{cases} k\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(9-k) & ;\ k\le 9 \\ k\underbrace{99999}_{\#(9)=5}{}_{-(q+1)}(10-r) & ;\ k\ge 10, k-9={}_q r, 0<r\le 9 \\ k\underbrace{99999}_{\#(9)=5}{}_{-q}0 & ;\ k\ge 10, k-9={}_q 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} ((k+1)-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-(k+1)) & ;\ k\le 9 \\ ((k+1)-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}{}_{-(q+1)}(10-r) & ;\ k\ge 10, k-9={}_q r, 0<r\le 9 \\ ((k+1)-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}{}_{-q}0 & ;\ k\ge 10, k-9={}_q 0 \end{cases} \\ &= ((k+1)-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-(k+1)) \end{aligned}$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$76923\times 13\times n = (n-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-n)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงถึงการหาผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 โดยประยุกต์ใช้บทตั้ง 1 และทฤษฎีบท 4 ซึ่งเป็นการหาผลคูณที่ถูกต้องและรวดเร็ว

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ $76923\times 13\times 27$

วิธีทำ โดยบทตั้ง 1 และทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 76923\times 13\times 27 &= (26)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(-17) \\ &= {}_2 6\underbrace{99999}_{\#(9)=5}{}_{-2}3 \\ &= 26999973 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ $76923\times 13\times 538$

วิธีทำ โดยบทตั้ง 1 และทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 76923\times 13\times 538 &= (537)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(-528) \\ &= {}_{53}7\underbrace{99999}_{\#(9)=5}{}_{-53}2 \\ &= 537999462 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4 จงหาค่าของ $76923\times 13\times 987654321$

วิธีทำ โดยบทตั้ง 1 และทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 76923\times 13\times 987654321 &= (987654320)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(-987654311) \\ &= {}_{98765432}0\underbrace{99999}_{\#(9)=5}{}_{-98765432}9 \\ &= 987653333345679 \end{aligned}$$

3. บทสรุปและแนวทางการขยายการศึกษา

จากการศึกษาผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 โดยอาศัยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และจำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ ทำให้สามารถตอบข้อสงสัยทั้งสองข้อของเราได้ ดังนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 ได้ดังกล่าวไว้ในทฤษฎีบท 4 ดังนี้

$$76923\times 13\times n = (n-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-n)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

(2) รูปทั่วไปที่ได้ตามทฤษฎีบท 4 นั้นสอดคล้องกับการสังเกตที่เราพบเมื่อแปลงเป็นจำนวนเศษเหลือ

จากการสังเกตผลคูณที่สวยงามของ 76923 กับพหุคูณของ 13 จนกระทั่งสามารถหาและพิสูจน์รูปทั่วไปได้ ซึ่งนับได้ว่ารูปทั่วไปนี้เป็นการวางนัยทั่วไป (generalization) ของการสังเกตของเรา และกล่าวเช่นเดียวกับ [4] ได้ว่ารูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 เป็นอีกความสวยงามวางนัยทั่วไป (generalized beauty) ในแบบคณิตศาสตร์อีกรูปแบบหนึ่ง ยิ่งไปกว่านั้นรูปทั่วไปนี้ยังช่วยให้การคำนวณหาผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 เป็นเรื่องที่สะดวกและไม่ยุ่งยากเกินไป

จากบทความนี้ ผู้อ่านสามารถเริ่มศึกษาลักษณะทางพีชคณิตที่สวยงามของจำนวนบางจำนวนได้ในทำนองเดียวกับบทความนี้ อาทิ ความสัมพันธ์ทางพีชคณิตของผลหาร $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ โดยอาศัยจำนวนเศษเหลือและหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการสร้างเลขโดดและการพิสูจน์ ผู้เขียนคาดว่าน่าจะได้รูปทั่วไปเช่นกัน โดยรูปทั่วไปที่ได้จะช่วยเพิ่มความสะดวกในการคำนวณต่าง ๆ นอกเหนือจากผลการศึกษาที่ได้รับแล้ว ผู้อ่านจะได้พบกับความสวยงามของคณิตศาสตร์อีกด้วย

4. กิตติกรรมประกาศ

บทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย : Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA) ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่านสำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์

5. เอกสารอ้างอิง

[1] อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2554, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1, ว.นเรศวรพะเยา 4(2): 29-35.

[2] Clark, W.E., 2002, Elementary number theory, Department of Mathematics, University of South Florida, U.S.A., Available Source: http://shell.cas.usf.edu/~wclark/elem_num_th_book.pdf, September 11, 2012.

[3] ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ, ว.นเรศวรพะเยา 6(1): 25-30.

[4] อภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การนิยามจำนวนหลายหลักที่แต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม, ว.วิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์ 8(2): รอตีพิมพ์.

[5] ณัฐพงษ์ พรมวงษ์ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2555, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 (เลข 6) ยกเว้นหลักหน่วยเป็นเลข 4 (เลข 7), ว.วิชาการมหาวิทยาลัยราชภัฏกาญจนบุรี 1(1): 41-49.

[6] อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และสมการเชิงเส้น, ว.วิทยาศาสตร์ มข. 41(3): รอตีพิมพ์.